Άσκηση: Να λυθεί το γρ. σύστημα $Ax=b$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση. Να βρεθεί ο αντίστοιχος μεταθετικός πίνακας P και να γίνει η LU ανάλυση του PA.

$$\begin{array}{c|ccccc}
1/2 & 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\
1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
 & 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \\
1/2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\
 & & 1/2 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\
1 & & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\
1 & & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\
 & & & 0 & 2 & 2 \\
 & & & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & 2 & 2
\end{array}$$

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x^T = [1, 1, 1, 1]$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$PA = LU$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 1/2 & 1 & 1 & \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Άσκηση</u>: Δίνεται το γρ. σύστημα $Ax=b$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel και να γίνουν από δύο επαναλήψεις της κάθε μεθόδου με $x_0=0$.

<u>Jacobi:</u>

$$G_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - G_J) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1/3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}\lambda =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{6}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = i\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ \lambda_3 = -i\dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}, \quad \rho(G_J) = \frac{\sqrt{6}}{6} < 1 \Rightarrow \text{συγκλίνει}$$

<u>Gauss-Seidel:</u>

$$G_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[D-L^{-1}] \; \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/6 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - G_{GS}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & \lambda+1/2 & 1 \\ 0 & -1/6 & \lambda-1/3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda+1/2 & 1 \\ -1/6 & \lambda-1/3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\right] = \lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{6}\lambda\right) = \lambda^2(\lambda+1/6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1/6 \end{cases} \rightarrow \rho(G_{GS}) = \frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \text{συγκλίνει.}$$

→ Γρηγορότερα συγκλίνει η Gauss - Seibel
Επειδή $\rho(G_{GS}) = \rho(G_J)^2$, συγκλίνει με διπλάσια ταχύτητα από εκείνη της Jacobi.

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_i x_i^{(k)}\right) / a_{ij}$$

$$x_1^{(k+1)} = (3 + x_2^{(k)})/2$$
$$x_2^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = (2 - x_2^{(k)})/3$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big) / a_{ij}$$
$$x_1^{(k+1)} = (3 + x_2^{(k)})/2$$
$$x_2^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = (2 - x_2^{(k+1)})/3$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 5/6 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -13/12 \\ 37/36 \end{pmatrix}$$

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f \in C^3[0,2]$ από τον πίνακα τιμών

x_i	0	1	2
f_i	0	1	1

και είναι γνωστό ότι $\max_{0\le x\le 2} |f^{(3)}(x)| = 4$.

Να βρεθεί το πολ. παρεμβ. και ένα φράγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο $[0,2]$.

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2
0	0		
1	1	1	
2	1	0	$-1/2$

$$P_2(x) = 0 + 1(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)(x-1) =$$
$$= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$R_3(x) = f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\phi(x), \quad \phi(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$|R_3(x)| \le \frac{1}{6}\max_{0\le\xi\le 2}|f^{(3)}(\xi)| \max_{0\le x\le 2}|\phi(x)| = \frac{4\cdot 2\sqrt{3}}{6\cdot 9} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$$

$$\phi'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\phi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad \phi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

$$\max_{0\le x\le 2}|\phi(x)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$